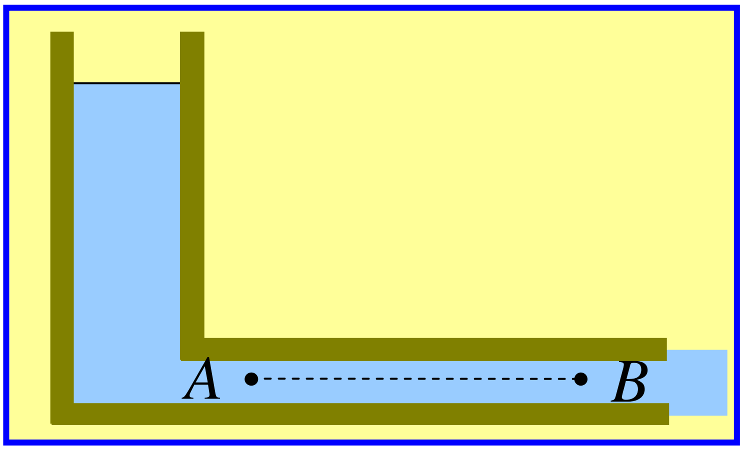
Γενίκευση του νόμου Bernoulli σε μια ροή όχι μόνιμη.

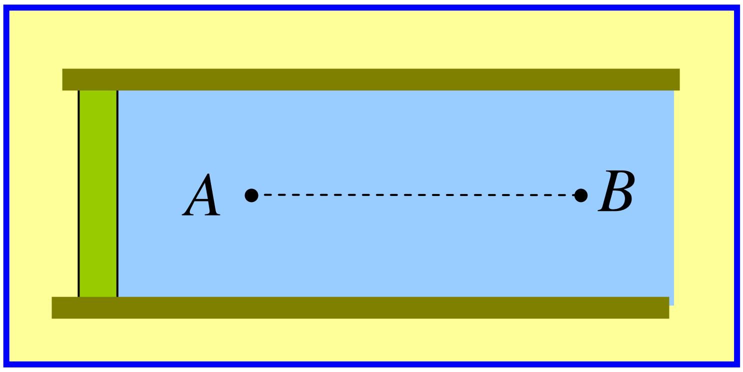
Έχουμε μια ροή σε οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής.
Αυτή μπορεί να μην είναι μόνιμη για διαφόρους λόγους.



Οι ταχύτητες στα Α και Β είναι κάθε στιγμή ίσες αλλά μειώνονται.
Η μείωση οφείλεται σε πτώση της στάθμης του τροφοδοτούντος δοχείου.

Η ταχύτητα μειώνεται.
Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας σε ένα σημείο: $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$.
Έχουν ίδιες πιέσεις τα Α και Β;

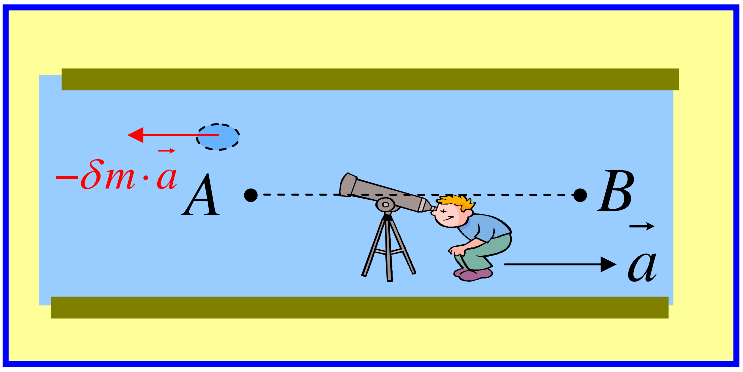
Το έμβολο κινείται με σταθερή επιτάχυνση.
Μαζί του και το νερό.
Οι ταχύτητες στα Α και Β είναι ίσες κάθε στιγμή.
Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της ταχύτητάς τους $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$.
Οι πιέσεις στα Α και Β είναι ίσες;



Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, αν εφαρμόζαμε τον νόμο Bernoulli θα είχαμε:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 \Rightarrow P_A = P_B \quad \text{, διότι } \upsilon_A = \upsilon_B .$$

Τι ισχύει;

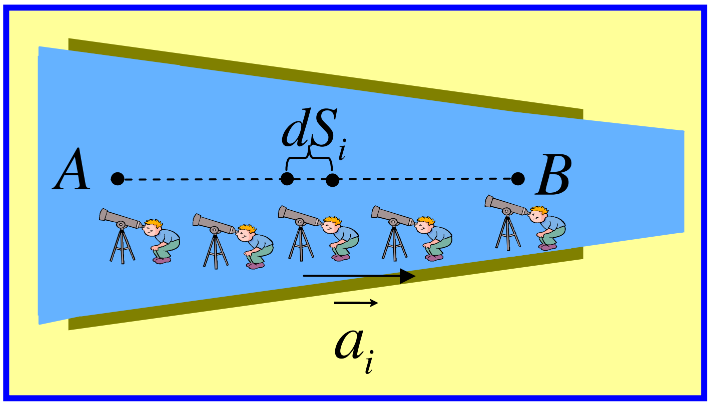


Βάζουμε έναν παρατηρητή που κινείται με επιτάχυνση $a = \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$.
Αυτός βλέπει μια <u>πρόσθετη</u> δύναμη σε κάθε μαζούλα νερού, μέτρου $\delta m \cdot a = \delta m \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t}$.
Ως εάν υπήρχε βαρύτητα, βλέπει μια διαφορά πίεσης μεταξύ των Α και Β ίση με:

$$P_A - P_B = \rho \cdot a \cdot (AB) = \rho \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot (AB)$$

Γι' αυτόν η πίεση είναι υδροστατική. Εμείς τι βλέπουμε;
Τα δικά μας μανόμετρα δεν μπορεί να δείχνουν άλλες ενδείξεις.
Η μόνη διαφορά μας από τον πιτσιρικά είναι ότι εμείς δεν θεωρούμε την πίεση υδροστατική.
Βλέπουμε όμως και εμείς διαφορά πίεσεων $P_A - P_B = \rho \cdot \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot (AB)$.
Εάν η ταχύτητα , σε κάθε σημείο του σωλήνα, αυξάνεται βλέπουμε το Α έχον μεγαλύτερη πίεση.
Και τούμπαλιν.

Αν η διατομή δεν είναι σταθερή;



Χρησιμοποιούμε έναν απειράριθμο στρατό από παρατηρητές.

Καθένας κινείται με επιτάχυνση $a_i = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t}$.

Όπου υ_i η ταχύτητα του ρευστού στην περιοχή την οποία επιτηρεί.

Κάθε ένας βλέπει διαφορά πιέσεων

$$dP_i = -\rho \cdot a_i \cdot dS_i = -\rho \cdot \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} \cdot dS_i$$

Εμείς βλέπουμε τα σημεία έχοντα ίδια διαφορά πίεσης.
Αν θέλουμε να βρούμε την **<u>πρόσθετη</u>** διαφορά πίεσης μεταξύ των Α και Β τότε…

$$P_A - P_B = \rho \cdot \frac{\partial \upsilon_1}{\partial t} \cdot dS_1 + \rho \cdot \frac{\partial \upsilon_2}{\partial t} \cdot dS_2 + \ldots - \rho \cdot \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} \cdot dS_i + \ldots.$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι:

$$P_A - P_B = \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS$$

Πως θα εφαρμόζαμε εδώ τον νόμο Bernoulli ;

Αν ήταν μόνιμη η ροή θα λέγαμε ότι $P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2$.

Τώρα θα προσθέσουμε και την παραπάνω, που βλέπουν οι παρατηρητές αλλά και εμείς.
Δηλαδή:

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 + \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS$$

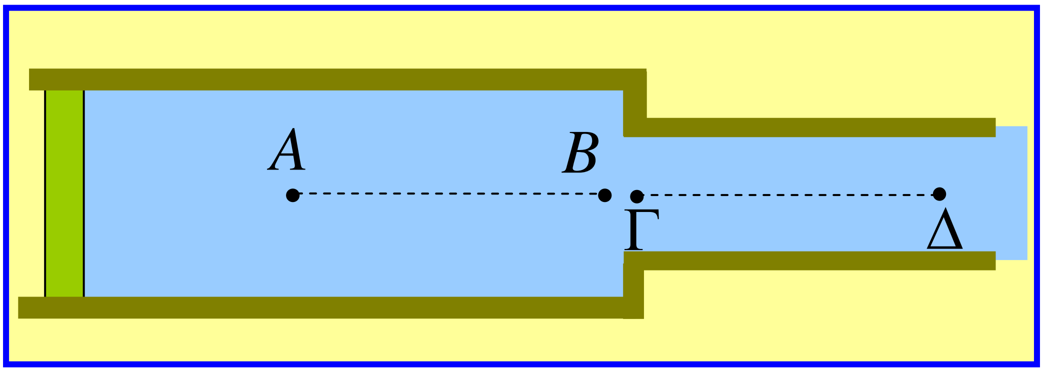
$$\Rightarrow P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 + \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS$$

Όταν υπάρχει και διαφορά «υψομέτρου»;
Εκεί θα είχαμε και την υδροστατική πίεση. Την κανονική, όχι την μαϊμού.
Τότε θα γράφαμε:

$$P_A + \rho \cdot g \cdot h_A + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 + \rho \cdot g \cdot h_B + \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS$$

<u>Εφαρμογή 1η .</u>

Αν $(AB) = (\Gamma\Delta) = 1m$, το έμβολο κινείται με επιτάχυνση $2\,{}^{m}/_{s^2}$ και ο αριστερός σωλήνας έχει διπλάσια διατομή από τον δεξιό, να βρείτε τις διαφορές πιέσεων την στιγμή $t = 2s$.
Το έμβολο είναι αρχικά ακίνητο.



Η εξίσωση συνεχείας επιβάλει το να έχουμε διπλάσια ταχύτητα στον δεξιό σωλήνα.
Έχουμε επομένως και διπλάσια επιτάχυνση.

$a' = 4\,{}^{m}/_{s^2}$.

Και $\upsilon_A = \upsilon_B = a \cdot t = 4\frac{m}{s}$

$\upsilon_\Gamma = \upsilon_\Delta = 8\frac{m}{s}$

$$P_A - P_B = \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS = \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} a \cdot dS = \rho \cdot a \cdot (AB) = 2 \cdot 10^3\, Pa$$

Επίσης:

$$P_\Gamma - P_\Delta = \rho \cdot \int_{S_\Gamma}^{S_\Delta} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS = \rho \cdot 2a \cdot (\Gamma\Delta) = 4 \cdot 10^3\, Pa$$

Όμως….

$$P_A + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 = P_\Delta + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Delta^2 + \rho \cdot \int_{S_A}^{S_\Delta} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS \Rightarrow P_A - P_\Delta = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Delta^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 + \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS + \rho \cdot \int_{S_\Gamma}^{S_\Delta} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS$$

$$\Rightarrow P_A - P_\Delta = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Delta^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 + \rho \cdot a \cdot (AB) + \rho \cdot a \cdot (\Gamma\Delta) = 30 \cdot 10^3\, Pa$$

Μεταξύ Β και Γ που είναι γειτονικότατα:

$$P_B + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 = P_\Gamma + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Gamma^2 + \rho \cdot \int_{S_B}^{S_\Gamma} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS \Rightarrow P_B - P_\Gamma = \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_\Gamma^2 - \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 + 0$$

Το ολοκλήρωμα ελήφθη μηδέν διότι η διαδρομή ΒΓ είναι αμελητέα.

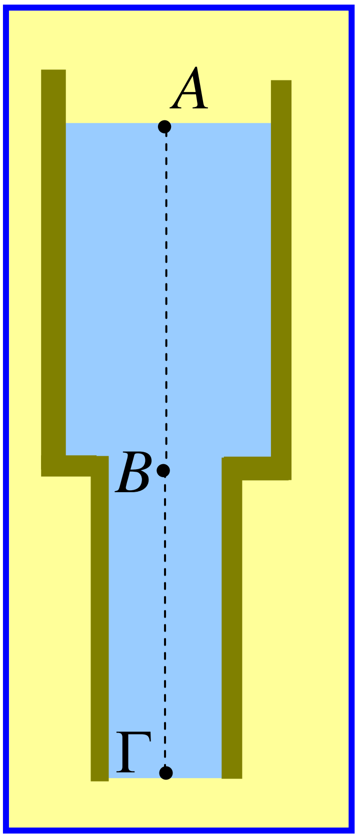
Έτσι $P_B - P_\Gamma = 24 \cdot 10^3\, Pa$

Η πίεση παρουσιάζει απότομη πτώση.

Εφαρμογή 2η

Με ποια επιτάχυνση κινείται η επιφάνεια του νερού αν ο πάνω σωλήνας έχει διπλάσια διατομή από τον κάτω και $(AB) = (B\Gamma) = 1m$;

Δίδεται πως $g = 10\, m/s^2$.



Απάντηση:

Η εξίσωση συνεχείας επιβάλει το να έχουμε διπλάσια ταχύτητα στον δεξιό σωλήνα. Έχουμε επομένως και διπλάσια επιτάχυνση.

Εφαρμόζουμε τον νόμο Bernoulli μεταξύ Α και Γ.

$$P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot (A\Gamma) + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_A^2 = P_{\alpha\tau\mu} + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_B^2 + \rho \cdot \int_{S_A}^{S_B} \frac{\partial \upsilon}{\partial t} \cdot dS$$

$$\Rightarrow g \cdot (A\Gamma) + \frac{1}{2}\upsilon_A^2 = \frac{1}{2}\upsilon_B^2 + a \cdot (AB) + 2a \cdot (\Gamma\Delta)$$

Την στιγμή της εκκίνησης οι ταχύτητες είναι μηδενικές, οπότε:

$$g \cdot 2(AB) = 3a \cdot (AB) \Rightarrow a = \frac{2g}{3} = \frac{20}{3}\, m/s^2.$$