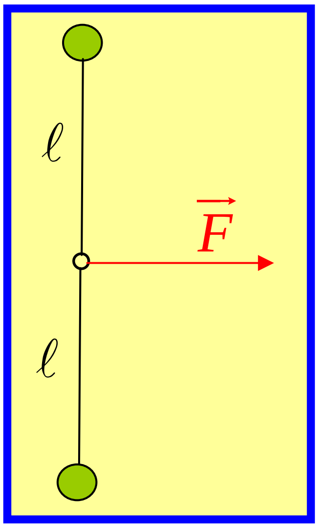
Δυο μπαλάκια και ένας κρίκος.

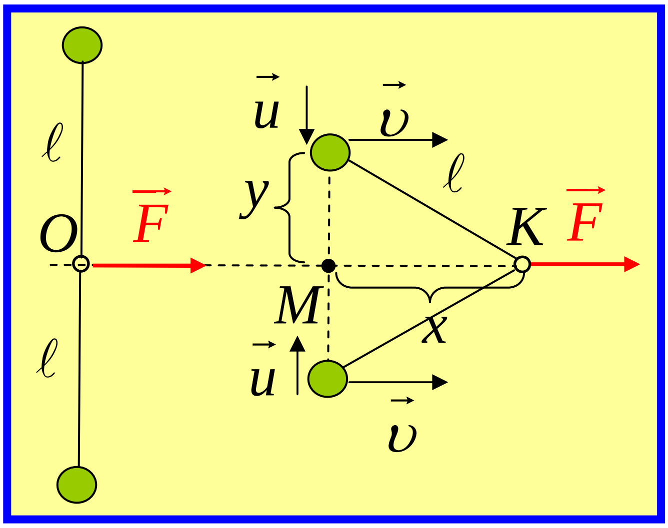


Δυο ολόιδια μπαλάκια, μάζας m, είναι δεμένα με αβαρή νήματα σε αβαρή κρίκο, όπως στο σχήμα. Οι ακτίνες τους είναι αμελητέες προ του μήκους των νημάτων.
Ο κρίκος δέχεται σταθερή δύναμη, κάθετη αρχικά στα δύο νήματα.

Θέλουμε να βρούμε τις ταχύτητες των μπαλακίων και του κρίκου, την στιγμή που αυτά συγκρούονται.
Θέλουμε επίσης να βρούμε ποια στιγμή συγκρούονται, πόσο έχει μετακινηθεί ο κρίκος και ότι άλλο μπορούμε να βρούμε.

Θέλουμε επίσης να κουραστούμε όσο λιγότερο γίνεται.
Επιτρέπεται χρήση υπολογιστή.

Λύση:
Σχεδιάζουμε το σύστημα σε τυχαία θέση.
Τα μπαλάκια είναι υποχρεωμένα να κινούνται έτσι ώστε να διατηρείται η συμμετρία.
Με την ίδια x ταχύτητα κινείται το κέντρο μάζας τους Μ. Αυτό εκτελεί κίνηση ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη, με επιτάχυνση $a = \dfrac{F}{2m}$.



Η, ούτως ειπείν, «κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας» υπολογίζεται από το ψευδοέργο:

$$F\cdot(OM) = \frac{1}{2}2m\cdot\upsilon^2 = m\cdot\upsilon^2 \qquad (1)$$

Η «πραγματική κινητική ενέργεια» είναι ίση με το έργο που προσφέραμε τραβολογώντας τον κρίκο:

$$F\cdot(OK) = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}m\cdot u^2 + \frac{1}{2}m\cdot u^2 = m\cdot\upsilon^2 + m\cdot u^2 \qquad (2)$$

Από τις παραπάνω (με αφαίρεση) έχω ότι:

$$F\cdot x = m\cdot u^2 \qquad (3)$$

Την στιγμή που συγκρούονται $x = \ell$ και επομένως $F\cdot\ell = m\cdot u^2 \Rightarrow u = \sqrt{\dfrac{F\cdot\ell}{m}}$ (4)

Ας παίξουμε με την (3):

$$F\cdot x = m\cdot u^2 \Rightarrow \frac{F}{m}\cdot\sqrt{\ell^2 - y^2} = \left(-\frac{dy}{dt}\right)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\sqrt{\frac{F}{m}}\cdot\sqrt[4]{\ell^2 - y^2} \Rightarrow dt = -\sqrt{\frac{m}{F}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{\ell^2 - y^2}}\cdot dy$$

Θέτω $z = \dfrac{y}{\ell}$ οπότε $dt = -\sqrt{\dfrac{m\cdot\ell}{F}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[4]{1 - z^2}}\cdot dz$

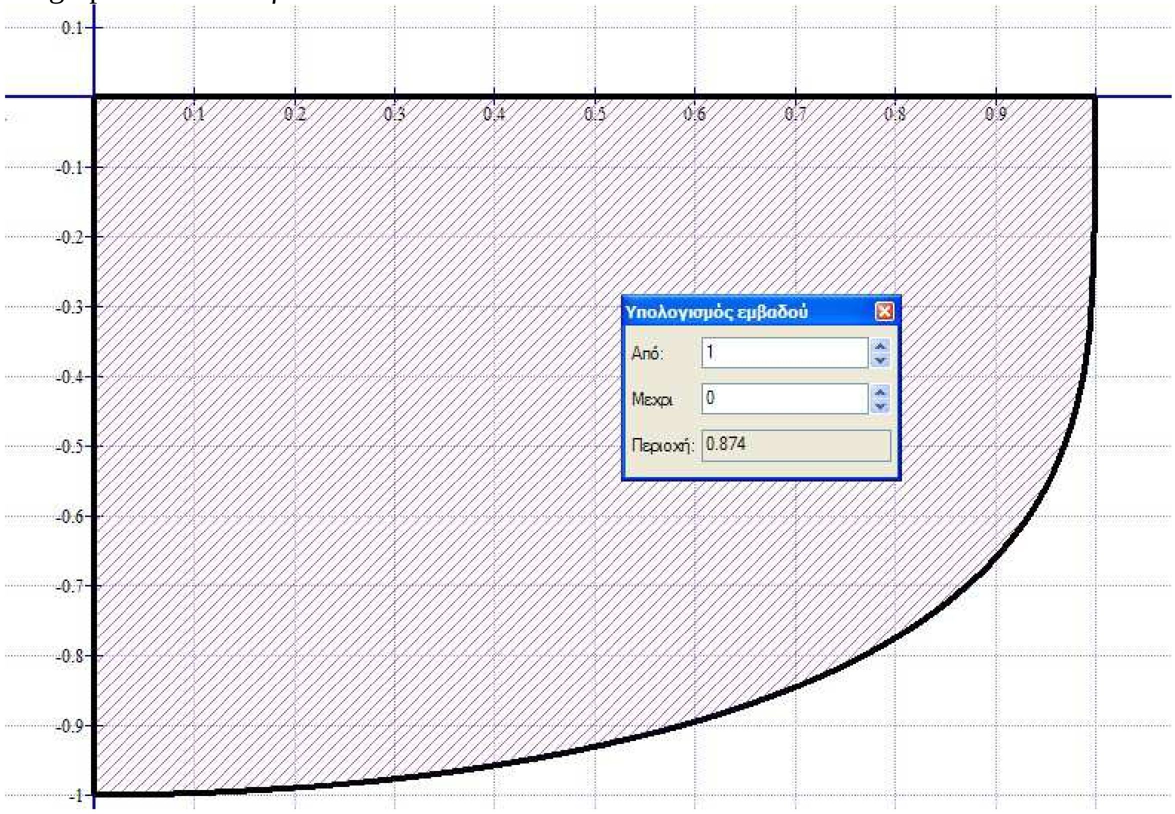
Σκέφτεται κάποιος να ολοκληρώσει και να βρει τον χρόνο.
Το ολοκλήρωμα είναι ιδιαιτέρως αντιπαθητικό. Προκύπτει η υπεργεωμετρική συνάρτηση!

Κάνουμε την γραφική παράσταση της $f(z) = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-z^2}}$.

Η αρχική τιμή του z είναι 1 και η τελική μηδέν.

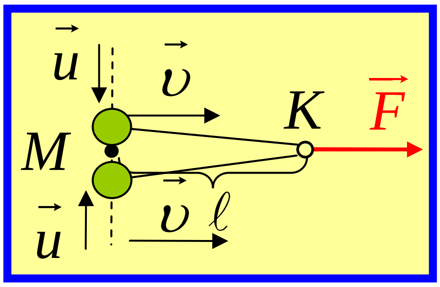
Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $\int_1^0 f(z)dz = \int_1^0 -\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-z^2}}dz$ ως εμβαδόν.

Το graph είναι πολύ βολικό.



Επομένως:

$$t = 0{,}874\sqrt{\frac{m\cdot\ell}{F}}$$



Στον χρόνο αυτόν τα μπαλάκια βρίσκονται πάνω στο Μ.

Έχουν x ταχύτητα

$$\upsilon = a\cdot t = \frac{F}{2m}\cdot 0{,}874\sqrt{\frac{m\cdot\ell}{F}} = 0{,}874\sqrt{\frac{F\cdot\ell}{4m}} = 0{,}437\sqrt{\frac{F\cdot\ell}{m}}$$

Ας δούμε λίγο την (4). Βλέπουμε ότι $\upsilon = 0{,}437\cdot u$

Οπότε κάθε μπαλάκι έχει ταχύτητα:

$$V = \sqrt{u^2 + 0{,}437^2\cdot u^2} \approx 1{,}09\cdot u \approx 1{,}09\cdot\sqrt{\frac{F\cdot\ell}{m}}$$

Ο κρίκος έχει την στιγμή εκείνη ταχύτητα όση το, Μ δηλαδή $\upsilon = 0{,}437\sqrt{\dfrac{F\cdot\ell}{m}}$.

Το Μ έχει μετατοπισθεί κατά $(OM) = \dfrac{1}{2}a\cdot t^2 = \dfrac{F}{4m}\cdot\left[0{,}874\sqrt{\dfrac{m\cdot\ell}{F}}\right]^2 \approx 0{,}19\cdot\ell$

Ο κρίκος έχει μετατοπισθεί κατά $(OM) + \ell \approx 1{,}19\cdot\ell$

Το εντυπωσιακό είναι ότι οι μετατοπίσεις αυτές, αλλά και οι τροχιές των μπαλακίων, δεν εξαρτώνται από μάζα ή δύναμη. Σε κάθε περίπτωση είναι ίδιες.