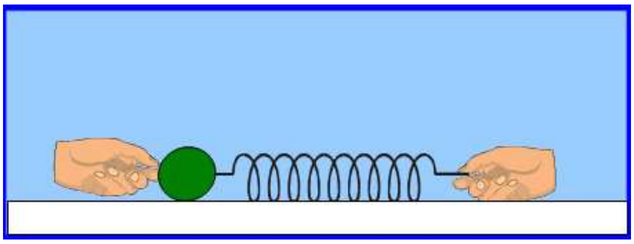
Η δύναμη που ασκεί το λάστιχο στο καρφί.

Το θέμα δεν θίγεται για πρώτη φορά. Στο διάλειμμα ημερίδας το είχε θέσει ο Ανδρέας.
Συμμετείχαμε διαφωνώντας ο Βαγγέλης Κουντούρης, ο Γιάννης Θάνος.



Αφήνουμε ταυτόχρονα μπαλάκι και ελατήριο.
Ποια δύναμη δέχεται το μπαλάκι;
Θα κινηθεί το μπαλάκι;
Μια άποψη είναι ότι το ελατήριο ασκεί στιγμιαία μια δύναμη διότι είναι παραμορφωμένο.
Άλλη άποψη λέει ότι δεν ασκεί δύναμη διότι δεν δέχεται δύναμη το άλλο άκρο του.
Το κέντρο μάζας του συστήματος ταυτίζεται με το κέντρο του μπαλακίου. Το τελευταίο, συνεπώς, θα μείνει ακίνητο.

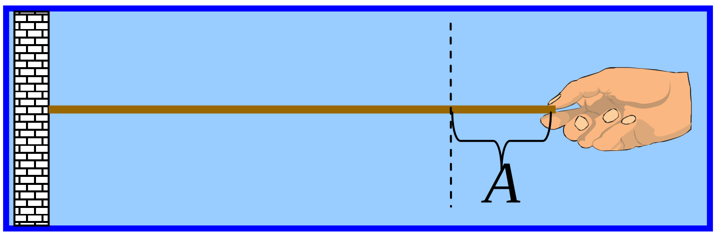
Θέτω το θέμα στο υλικονέτ, μπαίνουν στην συζήτηση ο Χρήστος Ελευθερίου, ο Μήτσος, ο Διονύσης και ο Βαγγέλης Κορφιάτης. Ο τελευταίος αναρτά και μελέτη καλή:
http://ylikonet.gr/profiles/blog/show?id=3647795%3ABlogPost%3A85515&commentId=3647795%3AComment%3A85375

Ο Βαγγέλης μιλάει για διαμήκη κύματα και ενεργοποίηση ανώτερων κανονικών τρόπων (normal modes) ταλάντωσης.

Οι προσομοιώσεις που παρατίθενται εκατέρωθεν δεν είναι ασφαλείς διότι δεν μπορούν να δώσουν συνεχή κατανομή μάζας.

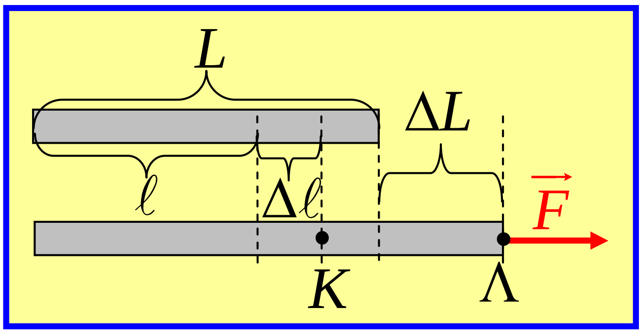
Τι θέλω να κάνω;
Αντικαθιστώ το ελατήριο με λάστιχο ώστε να μην αραιώνουν οι σπείρες και να παραμένει σταθερή η γραμμική πυκνότητα. Αντικαθιστώ το μπαλάκι με καρφί στον τοίχο ώστε να μην κινηθεί και να υπολογίσουμε την δύναμη που δέχεται κάθε στιγμή.
Εξάγοντας ακριβή σχέση θα επιχειρήσουμε προσέγγιση επ' αυτής και όχι επισφαλή προσέγγιση εξ αρχής ή παιχνίδια με το μηδέν και το άπειρο.
Θα πάρουμε ένα ρίσκο. Θα δεχθούμε ότι μέχρι να αποκτήσει το λάστιχο το φυσικό του μήκος, δεν διαδίδονται σ' αυτό διαμήκη κύματα αλλά όλα τα τμήματά του κινούνται προς τον τοίχο, με διαφορετικές φυσικά ταχύτητες.
Ο Θεός βοηθός και κάθε διόρθωση επιθυμητή.

Το πρόβλημα:



Έχουμε ένα λάστιχο μάζας m, μήκους L και σταθεράς k.
Το τεντώνουμε κατά A και το αφήνουμε.
Ποια είναι η δύναμη που δέχεται ο τοίχος όταν η παραμόρφωση του λάστιχου είναι x;

Απόπειρα λύσης:



Πριν αρχίσουμε να θυμηθούμε τον νόμο του Hook.

$$\Delta L = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S}\cdot L \qquad (1)$$

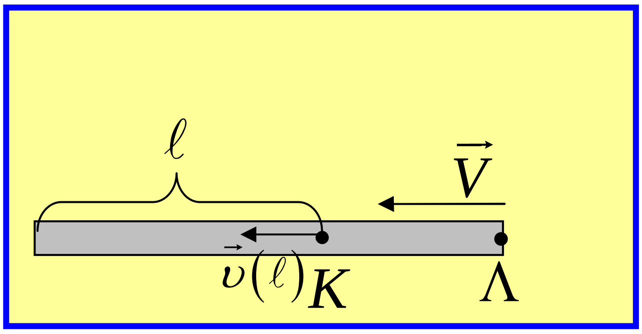
Όπου E το μέτρον του Young.
S η διατομή.
F η δύναμη και L το μήκος.

Τι σημαίνει αυτό όμως;
Ένα τμήμα μήκους ℓ έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$. Η ίδια δύναμη το τραβολογάει οπότε:

$$\Delta\ell = \frac{1}{E}\cdot\frac{F}{S}\cdot\ell \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \Delta\ell = \frac{\ell}{L}\cdot\Delta L$$

Η σχέση μετατοπίσεων μετατρέπεται εύκολα σε σχέση ταχυτήτων, δηλαδή $\upsilon_K = \frac{\ell}{L}\cdot\upsilon_\Lambda$.

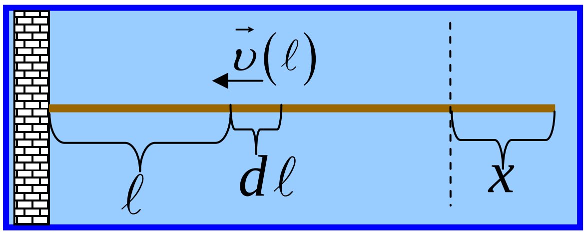


Με ακόμα πιο απλά λόγια

$$\upsilon(\ell) = \frac{\ell}{L}\cdot V$$

Ακόμα πιο απλά, το προσδεδεμένο άκρο είναι ακίνητο, το ελεύθερο έχει ταχύτητα V και η «κατανομή» ταχυτήτων είναι γραμμική.

Κάποια στιγμή η παραμόρφωση είναι x και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι $\frac{1}{2}k\cdot x^2$.



Πάμε για την κινητική.
«Κόβουμε» το ελατήριο σε τμήματα μήκους $d\ell$.
Το κάθε ένα έχει μάζα $dm = \mu\cdot d\ell = \frac{m}{L}\cdot d\ell$.

Έχει ταχύτητα $\upsilon(\ell) = \frac{\ell}{L}\cdot V$ και κινητική ενέργεια $dK = \frac{1}{2}dm\cdot\upsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{L}\cdot\frac{\ell^2}{L^2}V^2\cdot d\ell$

Η ολική κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{m}{L}\cdot\frac{\ell^2}{L^2}V^2\cdot d\ell = \frac{1}{2}\frac{m\cdot V^2}{L^3}\int_0^L \ell^2\cdot d\ell = \frac{1}{2}\frac{m}{3}\cdot V^2$$

Το λάστιχο δηλαδή έχει την ίδια κινητική ενέργεια που έχει σημειακή μάζα m/3 και κινείται με ταχύτητα όση το άκρο του. Η μάζα αυτή ονομάζεται «ενεργός μάζα».

Η ολική ενέργεια διατηρείται οπότε:

$$\frac{1}{2}k\cdot A^2 = \frac{1}{2}k\cdot x^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{3}\cdot V^2$$

Παραγωγίζουμε και …..

$$k\cdot x\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{m}{3}\cdot V\cdot\frac{dV}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{m}{3}\cdot\frac{dV}{dt} + k\cdot x = 0 \Rightarrow \frac{m}{3}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + k\cdot x = 0$$

Η λύση που ικανοποιεί την Δ.Ε. (θετική φορά προς τα δεξιά) είναι:

$$x = A\cdot\eta\mu\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Το κέντρο μάζας βρίσκεται στη μέση οπότε….

$$x_{cm} = \frac{A}{2}\cdot\eta\mu\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Η δύναμη που ασκεί (και δέχεται) ο τοίχος είναι ίση με τον ρυθμό μεταβολής της ορμής του κέντρου μάζας. Δηλαδή:

$$F = m\cdot\frac{d^2x_{cm}}{dt^2} = -m\cdot\frac{A}{2}\cdot\frac{3k}{m}\eta\mu\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3k}{2}\cdot A\cdot\eta\mu\left(\sqrt{\frac{3k}{m}}\cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι την στιγμή που αφήνουμε το λάστιχο η δύναμη έχει μέτρο:

$$\left|F\right| = \frac{3k}{2} \cdot A$$

Αυτό ισχύει όποια και αν είναι η τιμή της μάζας του ελατηρίου. Ακόμα και αν είναι αμελητέα.
Μπορούμε να κάνουμε «παιχνίδι» με τον όρο:

$$\eta\mu\left(\sqrt{\frac{3k}{m}} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

και να μιλάμε για μάζα που τείνει στο μηδέν και χρόνο που τείνει στο μηδέν και απροσδιοριστίες διάφορες. Όμως ο χρόνος γίνεται μηδέν αλλά η μάζα όχι.
Ακόμα και αν τείνει στο μηδέν υπάρχει δύναμη. Μια δύναμη που δρα για χρόνο ενός τετάρτου της περιόδου. Δηλαδή:

$$\Delta t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{3k}}$$

Όταν η μάζα τείνει στο μηδέν ο χρόνος τείνει στο μηδέν.
Αν ο τοίχος αντικατασταθεί από σώμα που μπορεί να κινηθεί, τότε η ώθηση της δύναμης θα τείνει στο μηδέν και το σώμα θα κινηθεί ελάχιστα. Πρακτικά δεν θα κινηθεί.
Μια τέτοια δύναμη είναι προβληματικά μετρήσιμη. Αν ασκείται σε κάποιο δυναμόμετρο, τότε η μάζα του κινητού τμήματος του δυναμόμετρου (δίσκος ή άγκιστρο) θα καθορίσει τον χρόνο δράσης-καταγραφής. Σε κάθε περίπτωση ένα πείραμα θα είναι «προβληματικό».

Παραμένει ένα άλλο προβληματικό σημείο. Θα διαδοθούν κύματα στο λάστιχο;
Μήπως η εγκατάστασή τους απαιτεί περισσότερο χρόνο από αυτόν του ενός τετάρτου της περιόδου, οπότε το φαινόμενο τελειώνει;