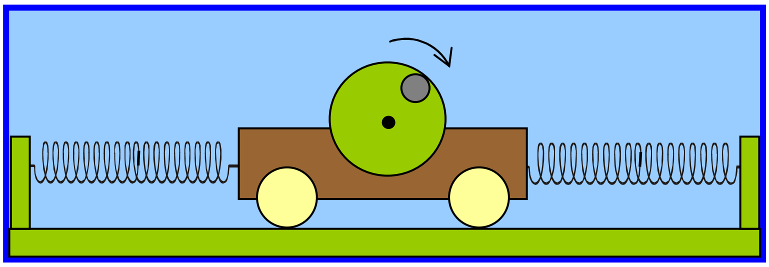
Μια εξαναγκασμένη ταλάντωση.

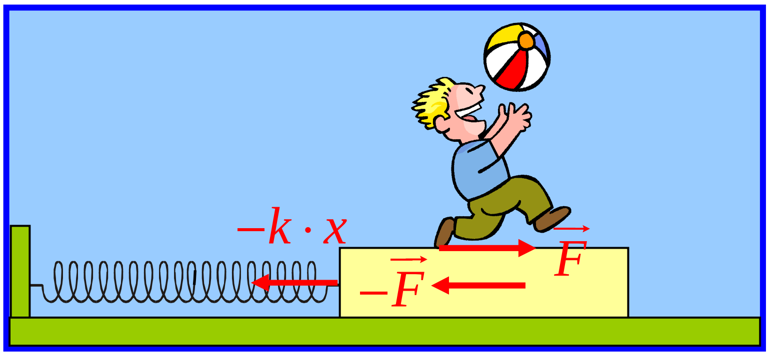
Είδα πως ο Διονύσης ανέβασε πρόσφατα μια συζήτηση του 2009.
Η συζήτηση ξεκίνησε από τον Κώστα Μυσίρη. Ήταν η:
«1ο Μέρος. Διάταξη σύνθεσης ταλαντώσεων; Η μήπως … συντονισμού;»

Τότε πλησίαζε η μέρα της παρουσίασης του βιβλίου των Θ. Μαχαίρα και Στ. Λέτη **«Θέματα Φυσικής»**.
Το θέμα αντιμετωπίζεται με λεπτομέρειες στο βιβλίο, στο Κεφάλαιο 3.

Ένας διεγέρτης-παιγνίδι:
Ένα καροτσάκι δεμένο με δυο ελατήρια.
Ένα μοτεράκι περιστρέφει έναν ελαφρύ δίσκο, στην περιφέρεια του οποίου έχουμε ένα βαράκι.
Θα εκτελέσει εξαναγκασμένη ταλάντωση το καροτσάκι;



Απλούστερο μοντέλο:



Η πλατφόρμα δεν εμφανίζει τριβές με το οριζόντιο πάτωμα.
Το παιδί, μάζας Μ, κινείται με επιτάχυνση $\overrightarrow{a_\pi}$ και η πλατφόρμα μάζας m με επιτάχυνση $\vec{a}$.
Η θέση της άκρης της πλατφόρμας είναι x, μετρούμενη από την θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Για την πλατφόρμα:
$-k\cdot x - F = m\cdot a$

Για το παιδί:
$F = M\cdot a_\pi$

Προσθέτω και…..
$-k\cdot x = m\cdot a + M\cdot a_\pi$ (1)

Αν η σχετική επιτάχυνση του παιδιού ως προς την πλατφόρμα είναι $\overrightarrow{a_{\sigma\chi}}$, τότε $\overrightarrow{a_\pi} = \vec{a} + \overrightarrow{a_{\sigma\chi}}$.

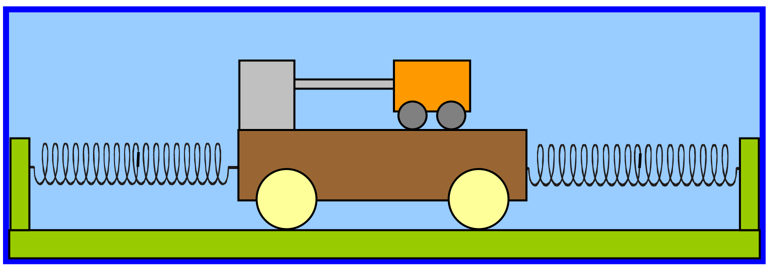
Η σχέση (1) γίνεται: $-k\cdot x = (m+M)\cdot a + M\cdot a_{\sigma\chi}$ ή τελικά….

$$(m+M)\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + k\cdot x = -M\cdot a_{\sigma\chi}$$

Αν γνωρίζουμε την σχετική επιτάχυνση ως συνάρτηση του χρόνου δεν έχουμε παρά να λύσουμε την διαφορική εξίσωση και να βρούμε την θέση της πλατφόρμας συναρτήσει του χρόνου.

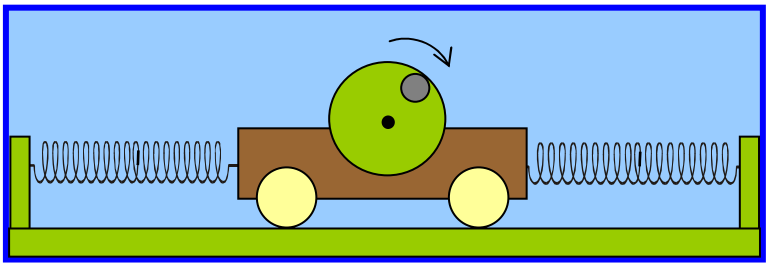
Ο όρος $-M\cdot a_{\sigma\chi}$ έχει διαστάσεις δύναμης. Θα μπορούσε να εκληφθεί ως δύναμη διεγέρτη.
Για να φτάσουμε σε οικεία εδάφη θα πρέπει ο όρος να είναι αρμονικός.
Ο επιβάτης δηλαδή να εκτελεί αρμονική ταλάντωση **<u>ως προς την πλατφόρμα</u>**.

Εξαναγκασμένη ταλάντωση.
Πως θα μπορούσαμε να το πετύχουμε αυτό;



Ο γκρίζος μηχανισμός είναι βιδωμένος στην πλατφόρμα. Ότι και να γίνει αναγκάζει το μικρό καροτσάκι να εκτελεί αρμονική ταλάντωση <u>ως προς το μεγάλο</u>, με ελεγχόμενη συχνότητα. Τεχνικά δύσκολο.

Τεχνικά ευκολότερο είναι το να υλοποιήσουμε την διάταξη δεξιά.
Το βαράκι εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση ως προς την πλατφόρμα αλλά η x προβολή του εκτελεί αρμονική ταλάντωση.
Έστω ότι ο κινητήρας στρέφεται με γωνιακή συχνότητα ω_κ. Τότε:



$$a_{\sigma\chi,x} = -\omega_\kappa^2 \cdot R \cdot \eta\mu(\omega_\kappa \cdot t + \varphi_o)$$

Όπου R είναι η ακτίνα της κυκλικής (ως προς την πλατφόρμα) τροχιάς του βαρακίου.

Αν δεν υπάρχουν αποσβέσεις:
Έστω ότι την στιγμή που ξεκινάει το μοτεράκι, η x προβολή του βαρακίου είναι R.

Τότε $a_{\sigma\chi,x} = -\omega_\kappa^2 \cdot R \cdot \eta\mu\left(\omega_\kappa \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$

Η Δ.Ε. γίνεται:

$$(m+M)\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + k\cdot x = M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m+M}\cdot x = \frac{M}{m+M}\cdot\omega_\kappa^2\cdot R\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Η λύση της ομογενούς είναι:

$x = B\cdot\eta\mu(\omega\cdot t+\varphi)$, όπου $\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$

Η πλήρης έχει λύση την $x = C\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$

Όπου:

$$-C\cdot\omega_\kappa^2\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{k}{m+M}\cdot C\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{M}{m+M}\cdot\omega_\kappa^2\cdot R\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{k-(m+M)\omega_\kappa^2}{m+M}\cdot C = \frac{M}{m+M}\cdot\omega_\kappa^2\cdot R \Rightarrow C = \frac{M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R}{k-(m+M)\omega_\kappa^2}$$

Η λύση της Δ.Ε. είναι το άθροισμά τους:

$$x = B\cdot\eta\mu(\omega\cdot t+\varphi) + C\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

Τα B και φ υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες.

Αν την στιγμή μηδέν το καροτσάκι είναι ακίνητο και στην θέση μηδέν τότε:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow B\cdot\omega\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi = 0$$

Η γωνία φ είναι επομένως π/2 ή 3π/2. Βάζοντας το ένα ή το άλλο θα υπολογιστεί διαφορετικό B.
Ας βάλουμε το 3π/2

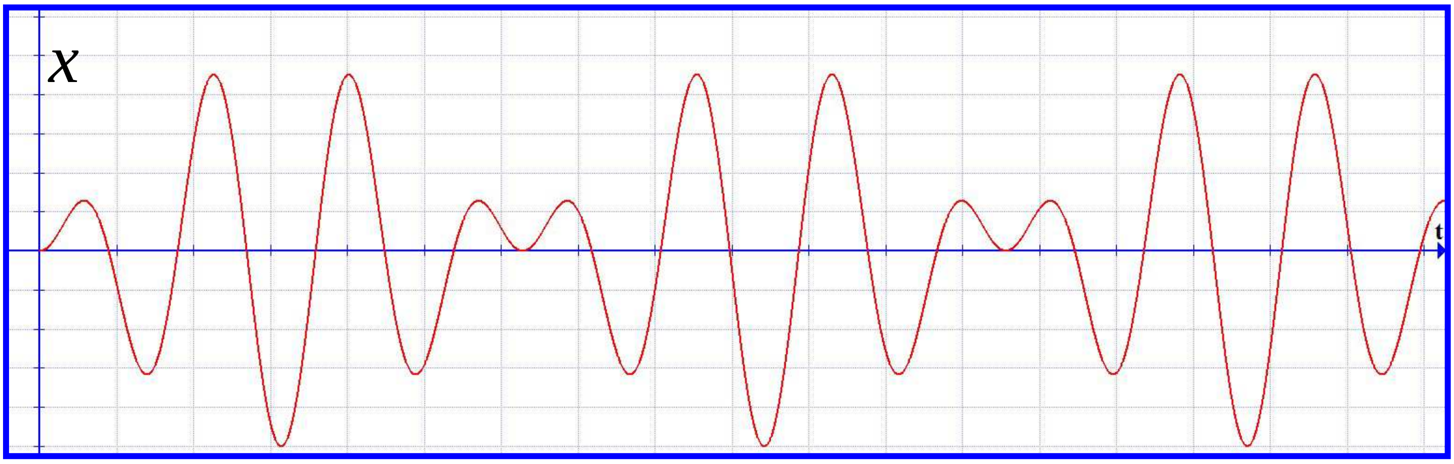
Την στιγμή μηδέν $x = 0 \Rightarrow B\cdot\eta\mu\frac{3\pi}{2} + C\cdot\eta\mu\frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow B = C = \frac{M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R}{k-(m+M)\omega_\kappa^2}$

Η λύση είναι επομένως:

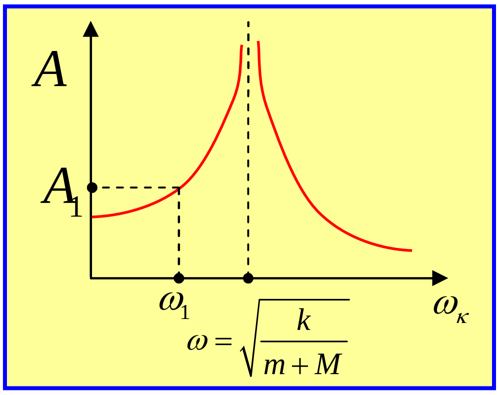
$$x = \frac{M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R}{k-(m+M)\omega_\kappa^2}\cdot\eta\mu\left(\omega\cdot t+\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R}{k-(m+M)\omega_\kappa^2}\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{2M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R}{k-(m+M)\omega_\kappa^2}\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega-\omega_\kappa}{2}t\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\omega+\omega_\kappa}{2}t\right)$$

Έχουμε ένα διακρότημα:



Πλάτος δεν υφίσταται όταν διαφέρουν οι συχνότητες ω και ω_κ.



Η καμπύλη που «κυκλοφορεί» σε βιβλία έχει πρόβλημα.

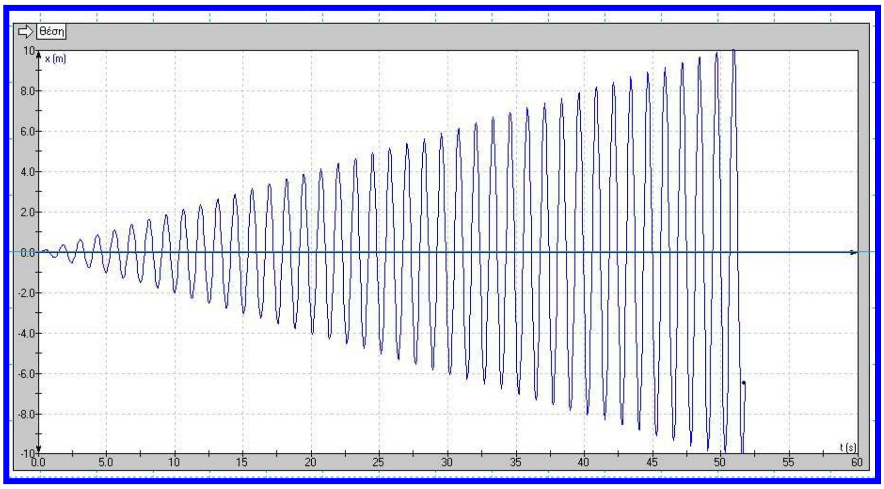
Είναι λάθος το να συμπεράνουμε ότι στην ω_1 αντιστοιχεί πλάτος A_1. Δεν υπάρχει πλάτος.

Τι θα συμβεί αν $\omega_\kappa = \omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}}$;

Τι θα σήμαινε συντονισμός εδώ;

Θα είχαμε άπειρο πλάτος;

Περιγράφεται από τον Θρασύβουλο και απεικονίζεται από τον Σταύρο στο CD που συνοδεύει το βιβλίο.



Το πλάτος αυξάνεται συνεχώς. Μέχρις ότου καταρρεύσει το σύστημα.

Μια προσομοίωση δείχνει το πώς:

Παρακάμπτω το μαθηματικό τμήμα του συντονισμού όταν δεν έχουμε απόσβεση.
Αυτό δεν σημαίνει ότι στερείται ενδιαφέροντος.

Αν υπάρχει απόσβεση:

Αν υπάρχει απόσβεση $F_{\alpha\nu\tau} = -b \cdot \upsilon$ τότε θα έχουμε μεταβατικά φαινόμενα.

Όταν τελειώσουν το θα έχουμε μια εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ω_κ.

$x = A \cdot \eta\mu\left(\omega_\kappa t + \theta\right)$

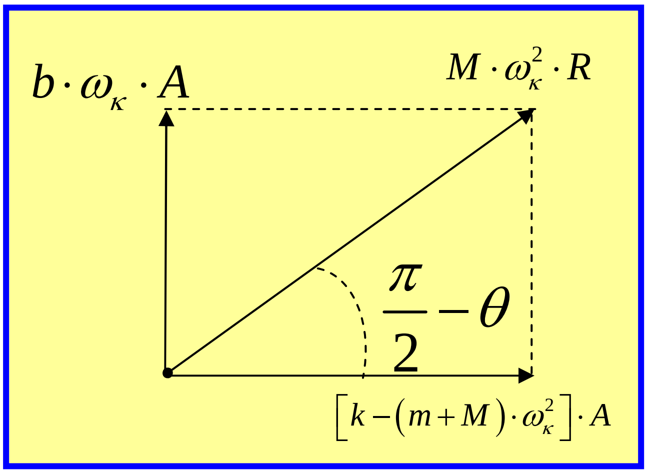
Ο διεγέρτης-μοτεράκι θα επιβάλλει την συχνότητά του.

Τότε:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{b}{m+M}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m+M}\cdot x=\frac{M}{m+M}\cdot\omega_\kappa^2\cdot R\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$-A\cdot\omega_\kappa^2\cdot\eta\mu(\omega_\kappa t+\theta)+\frac{b}{m+M}\cdot\omega_\kappa\cdot A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega_\kappa t+\theta)+\frac{k}{m+M}\cdot A\cdot\eta\mu(\omega_\kappa t+\theta)=\frac{M}{m+M}\cdot\omega_\kappa^2\cdot R\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left[k-(m+M)\cdot\omega_\kappa^2\right]\cdot A\cdot\eta\mu(\omega_\kappa t+\theta)+b\cdot\omega_\kappa\cdot A\cdot\sigma\upsilon\nu(\omega_\kappa t+\theta)=M\cdot\omega_\kappa^2\cdot R\cdot\eta\mu\left(\omega_\kappa\cdot t+\frac{\pi}{2}\right)$$



Σχηματικά δηλαδή με στρεφόμενα…..

Η φορά το «οριζόντιου» διανύσματος αλλάζει αν $\omega_\kappa>\sqrt{\frac{k}{m+M}}$

Η γωνία γίνεται αμβλεία.

Έστω ότι το καροτσάκι είναι, μαζί με το βαράκι $M+m=1kg$

Το βαράκι ας είναι 100g.

Έστω ότι $k=100\frac{N}{m}$.

Η ακτίνα του δίσκου ας είναι $R=0,1m$.

Η συχνότητα περιστροφής ας είναι $\omega_\kappa=8\,{rad}/{s}$.

Και η απόσβεση ας είναι $2N\cdot s$

Τότε $\left[k-(m+M)\cdot\omega_\kappa^2\right]^2\cdot A^2+b^2\cdot\omega_\kappa^2\cdot A^2=M^2\cdot\omega_\kappa^4\cdot R^2$

$\Rightarrow 1552\cdot A^2=0,41\Rightarrow A\approx 0,016m$

Η αντίδραση του δαπέδου μεταβάλλεται περιοδικά με την περιστροφή, κάτι όμως που δεν επηρεάζει την ταλάντωση.

Αν τα ροδάκια έχουν σημαντική μάζα, τότε πρέπει να προσθέσουμε στην μάζα του καροτσιού τον έναν όρο που θα είναι ίσος με $4\frac{I}{r^2}$. Το I είναι η ροπή αδράνειας κάθε ρόδας και r η ακτίνα της.