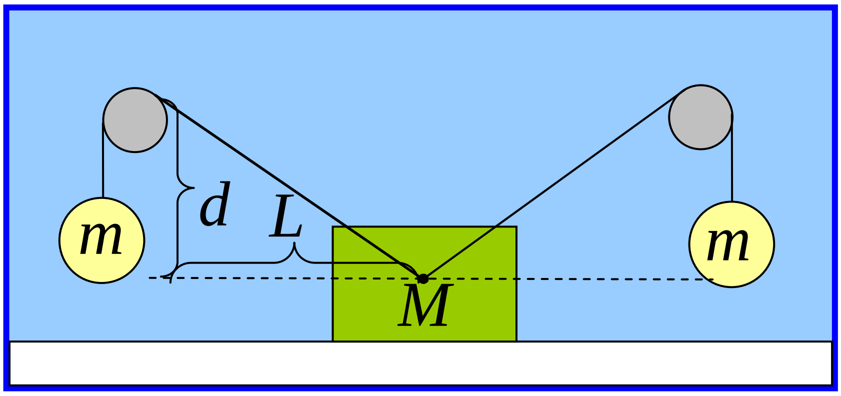
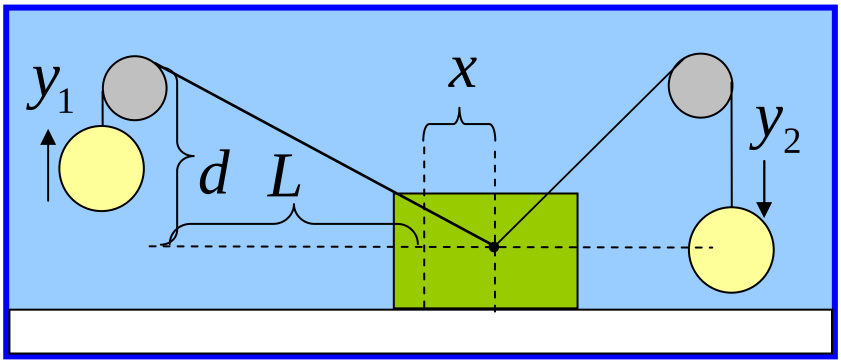
Μια ταλάντωση, κατά προσέγγισιν αρμονική.



Δείξατε ότι αν το κεντρικό σώμα εκτραπεί ελάχιστα από την θέση ισορροπίας του εκτελεί, κατά προσέγγισιν, αρμονική ταλάντωση.

Υπολογίσατε την περίοδο.

Οι κρεμασμένες μάζες είναι τέτοιες ώστε το σώμα να μην ανασηκωθεί κατά την κίνησή του.



Ενεργειακή λύση:

Το αριστερό βαράκι ανέβηκε τόσο όσο μεγάλωσε η απόσταση κεντρικού σώματος-αριστερής τροχαλίας.
Δηλαδή:

$$y_1 = \sqrt{(L+x)^2 + d^2} - \sqrt{L^2 + d^2}$$

Το δεξί κατέβηκε τόσο όσο μίκρυνε η κεντρικού σώματος-δεξιάς τροχαλίας.
Δηλαδή:

$$y_2 = \sqrt{L^2 + d^2} - \sqrt{(L-x)^2 + d^2}$$

Έστω ότι υ είναι η ταχύτητα του κεντρικού σώματος. Του αριστερού είναι:

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{(L+x)^2 + d^2} - \sqrt{L^2 + d^2}\right) = \frac{L+x}{\sqrt{(L+x)^2 + d^2}}\frac{dx}{dt} = \frac{L+x}{\sqrt{(L+x)^2 + d^2}}\upsilon$$

Του δεξιού είναι:

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{L^2 + d^2} - \sqrt{(L-x)^2 + d^2}\right) = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + d^2}}\frac{dx}{dt} = \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2 + d^2}}\upsilon$$

Φυσικά οι δύο ταχύτητες έχουν αντίθετες φορές, κάτι που δεν επηρεάζει την λύση.
Αν το x είναι πολύ μικρό τότε:

$$\frac{dy_1}{dt} \approx \frac{L+x}{\sqrt{L^2 + d^2}}\upsilon \quad \text{και} \quad \frac{dy_2}{dt} \approx \frac{L-x}{\sqrt{L^2 + d^2}}\upsilon$$

Η ενέργεια διατηρείται οπότε:

$$m \cdot g \cdot y_1 - m \cdot g \cdot y_2 + \frac{1}{2}M \cdot \upsilon^2 + m \cdot \upsilon^2 \frac{L^2}{L^2 + d^2} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Παραγωγίζουμε και …..

$$m \cdot g \cdot \frac{dy_1}{dt} - m \cdot g \cdot \frac{dy_2}{dt} + M \cdot \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dt} + 2m \cdot \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{L^2}{L^2 + d^2} = 0$$

$$\Rightarrow m \cdot g \cdot \frac{L+x}{\sqrt{L^2 + d^2}}\upsilon - m \cdot g \cdot \frac{L-x}{\sqrt{L^2 + d^2}}\upsilon + M \cdot \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dt} + 2m \cdot \upsilon \cdot \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \frac{L^2}{L^2 + d^2} = 0$$

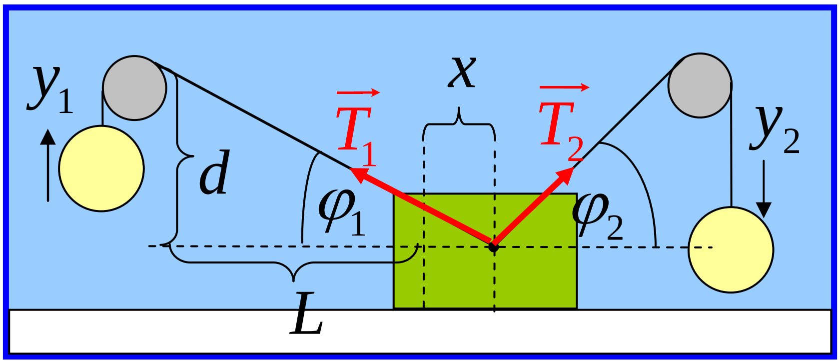
$$\Rightarrow\left(M+2m\cdot\frac{L^2}{L^2+d^2}\right)\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{2m\cdot g}{\sqrt{L^2+d^2}}\cdot x=0$$

$$\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{m\cdot g\cdot\dfrac{2}{\sqrt{L^2+d^2}}}{M+2m\cdot\dfrac{L^2}{L^2+d^2}}\cdot x=0$$

Έχουμε να κάνουμε με μία (κατά προσέγγισιν) αρμονική ταλάντωση.
Η περίοδος είναι:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{\left(M+2m\cdot\dfrac{L^2}{L^2+d^2}\right)\sqrt{L^2+d^2}}{2m\cdot g}}$$

Μια λύση δυναμική:



$$\sum F=-T_1\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_1+T_2\cdot\sigma\upsilon\nu\varphi_2$$
$$\Rightarrow\sum F=-m\cdot g\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\varphi_1-\sigma\upsilon\nu\varphi_2\right)$$
$$\Rightarrow\sum F=-m\cdot g\cdot\left(\frac{L+x}{\sqrt{(L+x)^2+d^2}}-\frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+d^2}}\right)$$

Επειδή το x είναι μικρό….

$$\Rightarrow\sum F\approx-\frac{2m\cdot g}{\sqrt{L^2+d^2}}\cdot x$$

Δηλαδή αρμονική ταλάντωση με περίοδο:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M\sqrt{L^2+d^2}}{2m\cdot g}}$$

Προφανώς κάτι περίεργο τρέχει.
Ή η πρώτη λύση είναι λανθασμένη, ή η δεύτερη, ή αμφότερες.
Τι συμβαίνει;