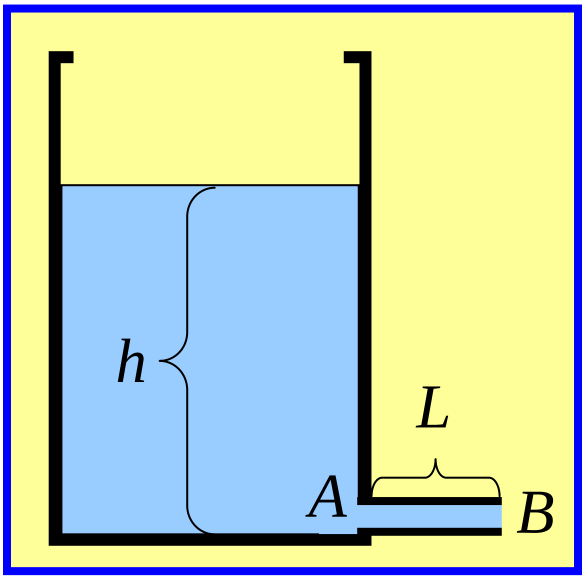
Πόση είναι τελικά η παροχή;

Βρίσκω σε σημειώσεις που κυκλοφορούν στο διαδίκτυο μία απόπειρα υπολογισμού του χρόνου αδειάσματος ενός δοχείου. Διαβάζω:



$$\Pi = \frac{\pi \cdot R^4}{8n \cdot L}\left(P_A - P_B\right)$$

Όμως $P_A = P_{\alpha\tau\mu} + \rho \cdot g \cdot h$ και $P_B = P_{\alpha\tau\mu}$

Επομένως:

$$\Pi = \frac{\pi \cdot R^4}{8n \cdot L}\rho \cdot g \cdot h \Rightarrow A \cdot \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot g}{8n \cdot L} \cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{\pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot g}{8n \cdot L \cdot A} \cdot dt$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε:

$$h = H \cdot e^{-\frac{\pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot g}{8n \cdot L \cdot A}t}$$

Όπου H το αρχικό ύψος.

Ελκυστικό το εξαχθέν διότι θυμίζει το δυναμικό πυκνωτή κατά την εκφόρτιση. Δηλαδή το:

$$V = V_o \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Από την άλλη σκέφτεται κάποιος τι θα έβγαινε αν δούλευε με ιδανικό υγρό.

Η ταχύτητα εξόδου του νερού θα ήταν $\upsilon = \sqrt{2g \cdot h}$.

Η παροχή θα ήταν $\Pi = S \cdot \upsilon$, όπου S η διατομή του σωλήνα. Δηλαδή:

$$\Pi = S\sqrt{2g \cdot h}$$

$$A \cdot \frac{dh}{dt} = -S\sqrt{2g \cdot h} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{h}} \cdot dh = -\frac{S}{A}\sqrt{2g} \cdot dt$$

Ολοκληρώνουμε και έχουμε ότι $2\sqrt{h} - 2\sqrt{H} = -\frac{S}{A}\sqrt{2g} \cdot t \Rightarrow \sqrt{h} = \sqrt{H} - \frac{S}{2A}\sqrt{2g} \cdot t$

$$\Rightarrow h = \left[\sqrt{H} - \frac{S}{2A}\sqrt{2g} \cdot t\right]^2$$

Μήπως η δεύτερη είναι προσέγγιση της πρώτης;

Παραγωγίζουμε την πρώτη και…..

$$\frac{dh}{dt} = -H\frac{\pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot g}{8n \cdot L \cdot A} \cdot e^{-\frac{\pi \cdot R^4 \cdot \rho \cdot g}{8n \cdot L \cdot A}t}$$

Δηλαδή η επιφάνεια του νερού στο δοχείο μεταβάλλεται εκθετικά με τον χρόνο.

Παραγωγίζουμε την δεύτερη και έχουμε ότι:

$$\frac{dh}{dt} = -2\left[\sqrt{H} - \frac{S}{2A}\sqrt{2g} \cdot t\right]\frac{S}{2A}\sqrt{2g} \Rightarrow -\frac{dh}{dt} = \frac{S}{A}\sqrt{2gH} - \left(\frac{S}{A}\right)^2 g \cdot t$$

Η ταχύτητα με την οποία κινείται η επιφάνεια του υγρού στο δοχείο μειώνεται γραμμικά με τον χρόνο. Η κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη. Σε πεπερασμένο χρόνο έχει μηδενισθεί η στάθμη και δεν τείνει στο μηδέν όπως μας λέει η προηγούμενη.

Τόσο μεγάλη διαφορά!
Μήπως όλες οι ασκήσεις με αδειάσματα δεξαμενών που ξεκίνησαν από τον Μιχάλη Μιχαήλ και ξεχειλώθηκαν από εμένα δεν έχουν ρεαλιστικό αντίκρισμα;

Από την άλλη όμως ας πάρουμε ένα δοχείο ύψους 1 μέτρου αρχικά. Αδειάζει με σωλήνα 10 πόντων που έχει ακτίνα 1 πόντο. Αν θεωρήσουμε την επίδραση του ιξώδους αμελητέα τότε η αρχική παροχή έχει την ρεαλιστική τιμή:

$$\Pi = S \cdot \upsilon = \pi \cdot R^2 \cdot \sqrt{2g \cdot h} \approx 0,0014 \frac{m^3}{s}$$

Λιγότερο από ενάμισυ λίτρο το δευτερόλεπτο.

Η μελέτη που βρήκα στο διαδίκτυο επιβάλλει αρχική παροχή:

$$\Pi = \frac{\pi \cdot R^4}{8n \cdot L} \rho \cdot g \cdot H \approx \frac{3,14 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-1}} \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 1 \approx 0,3925 \frac{m^3}{s}$$

Δηλαδή 392,5 λίτρα το δευτερόλεπτο. Σε ένα δευτερόλεπτο γεμίζεις μπανιέρα!!!!

Κάτι τρέχει αλλά τι;

Κάθε βοήθεια ευπρόσδεκτη.