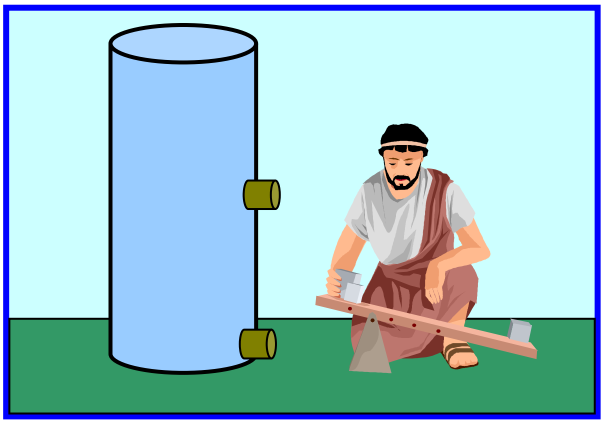
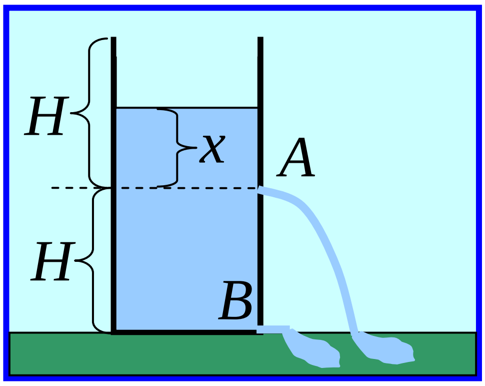
Πόσο νερό θα βγει από κάθε τρύπα;



Έχουμε ένα κυλινδρικό δοχείο γεμάτο νερό.
Κοντά στον πάτο και στη μέση έχουμε δυο εντελώς όμοιες τρύπες ταπωμένες.
Βγάζουμε τις τάπες ταυτόχρονα.
Πόσο νερό θα βγει από κάθε τρύπα;

Απάντηση:

Το νερό κάποια στιγμή θα κατέβει στη μέση. Τότε παύει να στάζει η πάνω τρύπα.
Το υπόλοιπο μισό νερό θα βγει από την κάτω. Έτσι ας βρούμε πόσο νερό έχει βγει από κάθε τρύπα μέχρι να φτάσει το νερό στη μέση. Μετά αποδίδουμε στην κάτω τρύπα και το μισό νερό επιπλέον.



Έστω ότι A είναι η διατομή του βαρελιού και S κάθε τρύπας.
Η ταχύτητα εξόδου του νερού στην Α είναι $\upsilon_A = \sqrt{2g \cdot x}$.
Στην Β τρύπα είναι $\upsilon_B = \sqrt{2g \cdot (x+H)}$.
Οι παροχές είναι:
$\Pi_A = S \cdot \upsilon_A = S \cdot \sqrt{2g \cdot x}$ και $\Pi_B = S \cdot \upsilon_B = S \cdot \sqrt{2g \cdot (x+H)}$

Αυτή ήταν όλη η Φυσική του προβλήματος.

Η ολική παροχή είναι $\Pi = \Pi_A + \Pi_B = \sqrt{2g \cdot x} + \sqrt{2g \cdot (x+H)}$.

$$\frac{\Pi}{\Pi_A} = \frac{\sqrt{2g \cdot x} + \sqrt{2g \cdot (x+H)}}{\sqrt{2g \cdot x}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+H}}{\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{H}{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dV_A} = 1 + \sqrt{1 + \frac{H}{x}} \qquad (1)$$

Όπου dV και dV_A οι στοιχειώδεις όγκοι νερού που βγαίνουν συνολικά και από την τρύπα Α.

$$(1) \Rightarrow dV_A = dV \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{H}{x}}} \Rightarrow dV_A = -\frac{A \cdot dx}{1 + \sqrt{1 + \frac{H}{x}}}$$

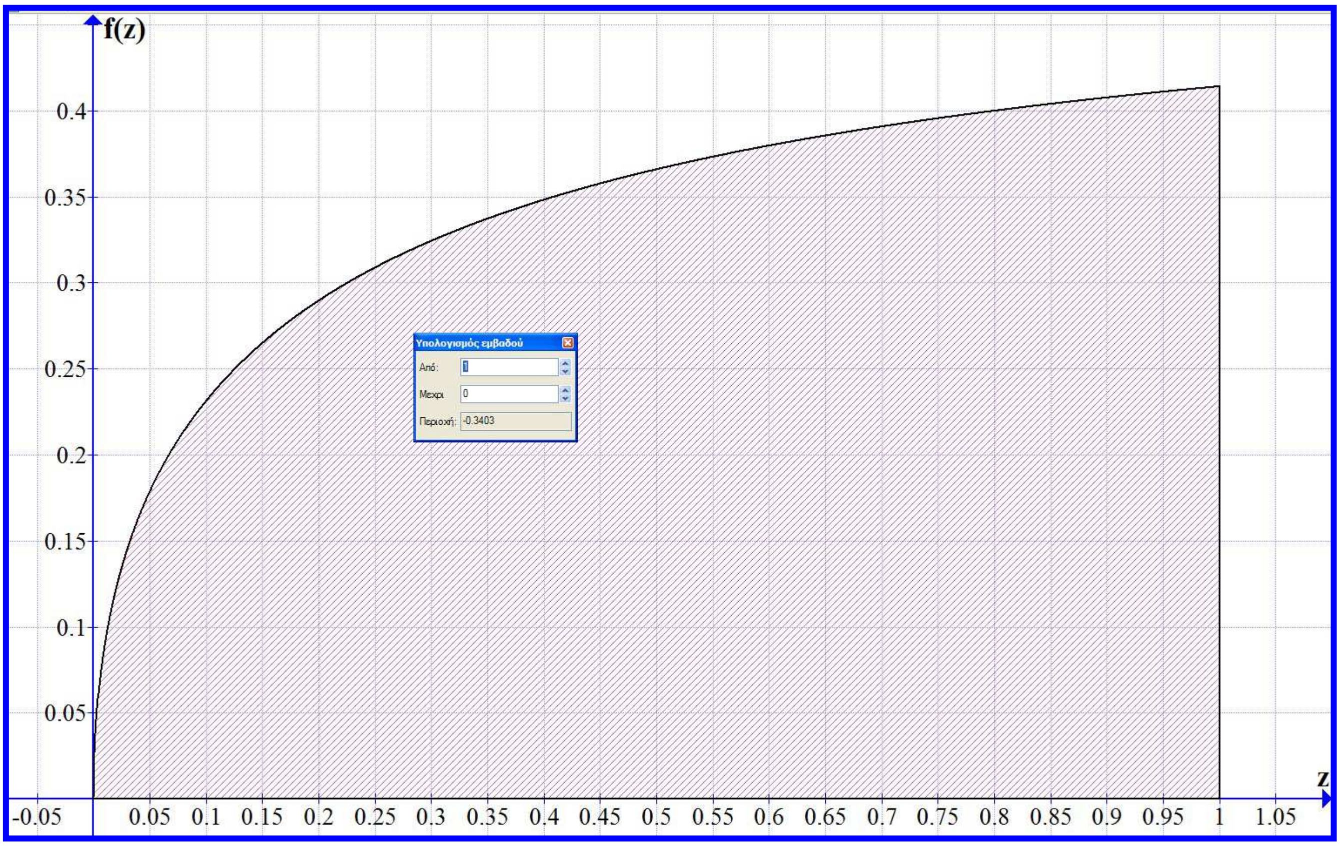
Ονομάζουμε $z = \frac{x}{H}$ και έχουμε ότι $dx = H \cdot dz$ και ακόμα ότι:

$$dV_A = -A \cdot H \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{z}}} \cdot dz$$

Θα βρούμε τον όγκο με ολοκλήρωμα:

$$V_A = -A \cdot H \cdot \int_1^0 \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{z}}} \cdot dz$$

Κάποτε ολοκληρώναμε «με το χέρι». Τώρα με το graph.



Το ολοκλήρωμα είναι $V_A \approx -A \cdot H \cdot (-0,34) \approx 0,34 \cdot \dfrac{V}{2} \approx 0,17 \cdot V$

Όπου V ο όγκος όλου του δοχείου.
Επομένως το 17% του νερού βγαίνει από την τρύπα Α και το 83% από την τρύπα Β.