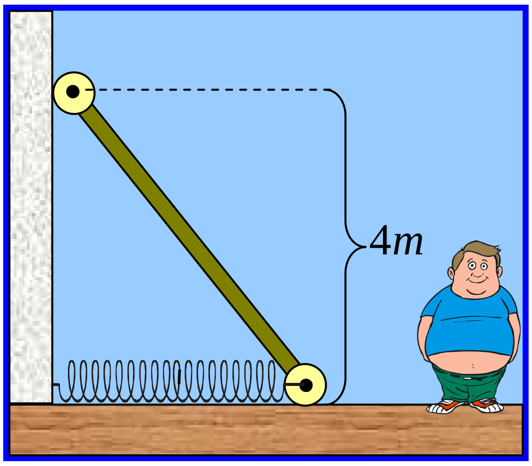
Ράβδος εν γωνία άρα ταλαντεύεται.



Το ραβδί έχει μάζα 10kg και μήκος 5m.
Τα ροδάκια έχουν αμελητέες μάζες και κυλίονται μια χαρά στον τοίχο και το πάτωμα, ότι και να γίνει.
Το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος και σταθερά 100N/m.
Η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι «ασκησιακή».

1. Σε ποια θέση θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία;

2. Ποια είναι η θέση ισορροπίας;

3. Ποια η περίοδος της ταλάντωσης;

Απάντηση:

1. Διατήρηση ενέργειας, άρα:

$$m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}k\cdot \Delta x^2$$

$$\Rightarrow 2h=\Delta x^2 \quad (\text{S.I.})$$

Όμως από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

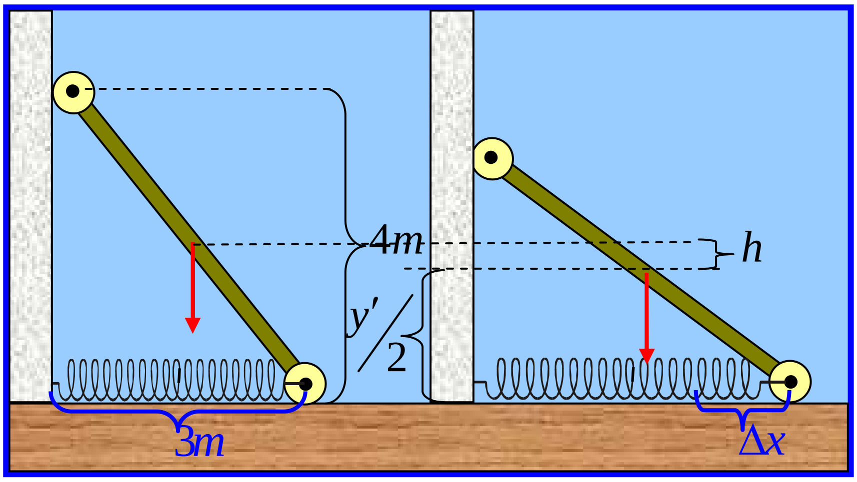
$$(4-2h)^2=5^2-(3+\Delta x)^2$$

$$\Rightarrow 16+4h^2-16h=16-\Delta x^2-6\Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta x^4-7\Delta x^2+6\Delta x=0$$

Μια λύση είναι $x=0$
Δεν μας ικανοποιεί.
Αποκλείοντάς την έχουμε:

$$\Delta x^3-7\Delta x+6=0$$



Μια εμφανής λύση είναι η $\Delta x=1$
Με σχήμα Horner βρίσκουμε ότι $\Delta x^3-7\Delta x+6=(\Delta x-1)\cdot(\Delta x-2)\cdot(\Delta x+3)$
Η λύση $\Delta x=-3m$ απορρίπτεται. Δεν θα σηκωθεί όρθιο το ραβδί.
Η λύση $\Delta x=1m$ γίνεται δεκτή. Το τρίγωνο από 3-4-5 θα γίνει 4-3-5.
Η λύση $\Delta x=2m$ σημαίνει το ραβδί στο πάτωμα. Η λύση αυτή, ενεργειακά αποδεκτή, δεν θα υλοποιηθεί διότι θα σταματήσει προηγουμένως όταν η κάτω ροδίτσα απέχει από τον τοίχο 4m.

2. Ισορροπία στον x-άξονα:

$$N=F=100\cdot(x-3) \quad (\text{S.I.})$$

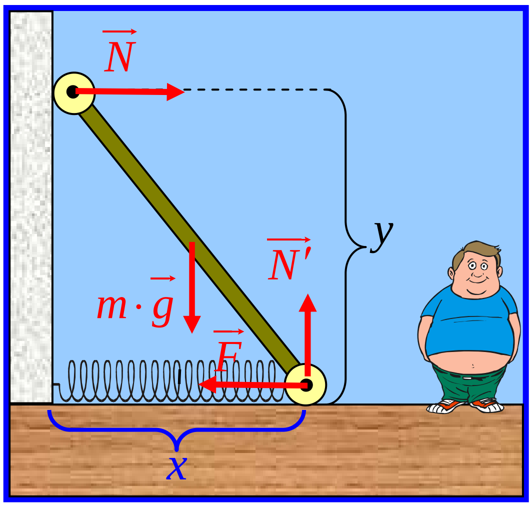
Ισορροπία στον y-άξονα:

$$N'=m\cdot g=100N$$

Ισορροπία ροπών ως προς την κάτω ροδίτσα:

$$N\cdot y=m\cdot g\cdot\frac{x}{2}\Rightarrow 100\cdot(x-3)\cdot y=50\cdot x$$

$$\Rightarrow 100\cdot(x-3)\cdot\sqrt{25-x^2}=50\cdot x\Rightarrow 2(x-3)\cdot\sqrt{25-x^2}=x$$



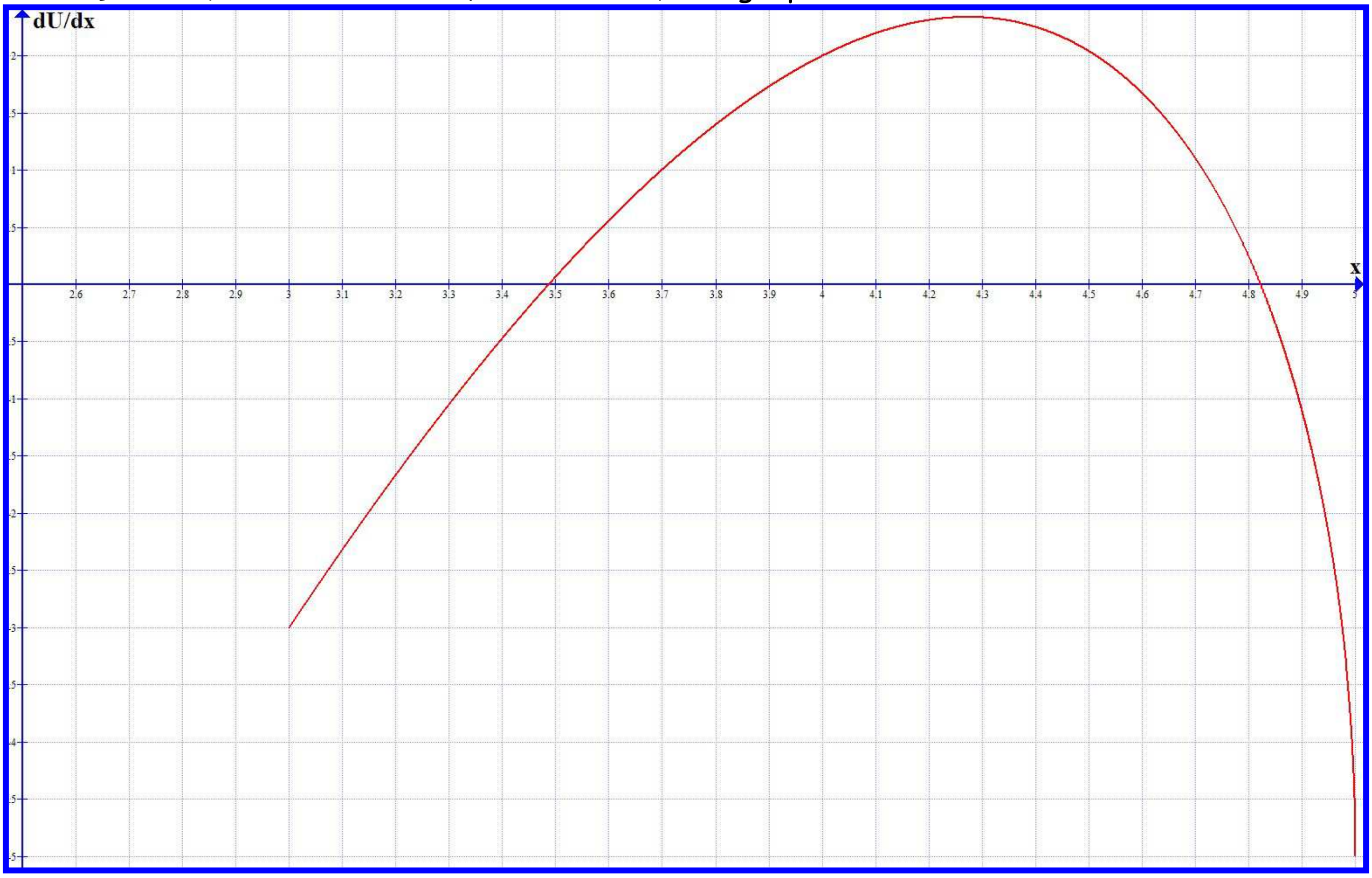
Αν εκφράζαμε την δυναμική ενέργεια του συστήματος συναρτήσει της απόστασης x από την γωνία, τότε:

$$U = \frac{1}{2}k\cdot(x-3)^2 + m\cdot g\cdot\frac{y}{2} = 50\cdot(x-3)^2 + 50\cdot\sqrt{25-x^2} \quad \text{(S.I.)}$$

Ακραίες τιμές έχουμε όταν η ως προς x παράγωγος είναι μηδέν, δηλαδή:

$2(x-3) - \frac{2x}{2\sqrt{25-x^2}} = 0 \Rightarrow 2(x-3)\cdot\sqrt{25-x^2} = x$. Όμως προσοχή. Πρέπει $x \neq 5m$.

Ίδια εξίσωση φυσικά. Θα λυθεί προσεγγιστικά με το graph.



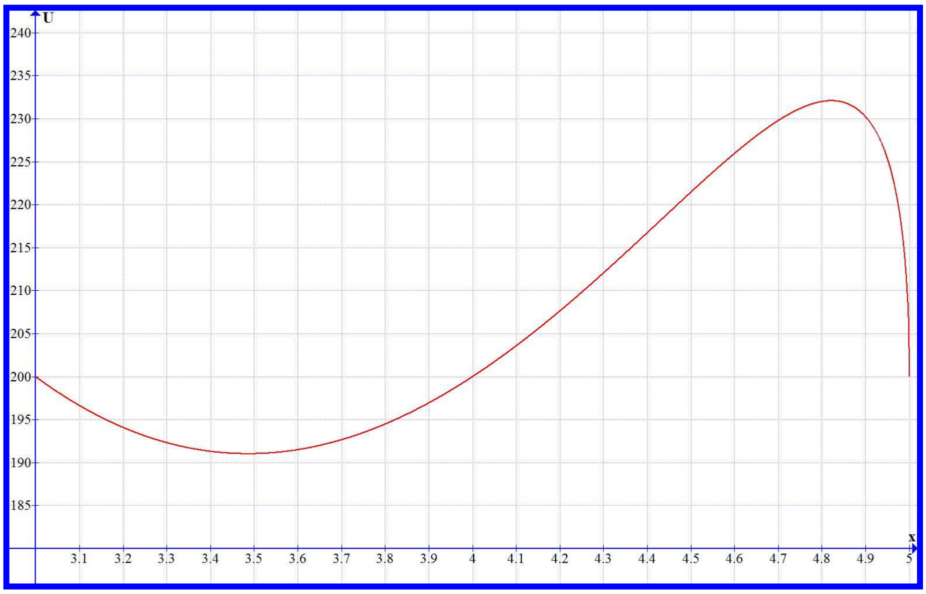
Εστιάζω και ρίζες είναι οι $x_1 \approx 3,49m$ και $x_1 \approx 4,82m$.

Απορρίπτουμε την δεύτερη όχι διότι δεν ισορροπεί σ' αυτήν αλλά διότι δεν θα φτάσει εκεί. Μην ξεχνάμε ότι θα μηδενισθεί η ταχύτητά του όταν $x_1 = 4m$.

Η γραφική παράσταση της ενέργειας του συστήματος είναι η δίπλα.

Βλέπουμε ένα σημείο ευσταθούς ισορροπίας $x_1 \approx 3,49m$ και ένα σημείο ασταθούς $x_1 \approx 4,82m$.

Αν με κάποια ώθηση έφτανε στο δεύτερο θα έπεφτε στο πάτωμα.



Μας έμεινε η περίοδος.

Ολίγα κινηματικά προηγουμένως.

3. Η περίοδος
Ας δούμε ολίγα κινηματικά πριν.

Ξέρουμε ότι η διάμεσος είναι $OM = \frac{L}{2} = 2,5m$.

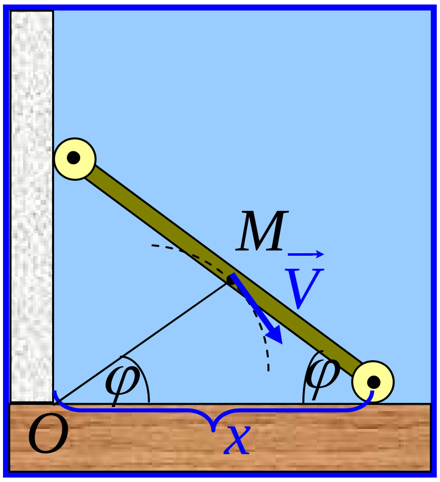
Το κέντρο μάζας, επομένως, κινείται σε κύκλο ακτίνας 2,5m.

Οι γωνίες της βάσης του τριγώνου είναι ίσες. Αμφότερες φ.

Έτσι η γωνιακή ταχύτητα του Μ είναι ίση με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου.

Αμφότερες $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

Η ταχύτητα του Μ είναι $V = \omega \cdot \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$



Βλέπουμε ότι $x = L \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -L \cdot \eta\mu\varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{L \cdot \eta\mu\varphi} \cdot \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{L \cdot \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{L}} \cdot \frac{dx}{dt}$

Επομένως:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{L^2 - x^2}} \cdot \frac{dx}{dt}}$$

Η κινητική ενέργεια είναι

$$K = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} \frac{m \cdot L^2}{12} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 \cdot \frac{L^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{m \cdot L^2}{12} \cdot \omega^2 = m \cdot \omega^2 \cdot \frac{L^2}{6} = m \cdot \frac{L^2}{6} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$\Rightarrow K = m \cdot \frac{L^2}{6\left(L^2 - x^2\right)} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{125}{3} \frac{1}{25 - x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \quad \text{(S.I.)}$$

Η ολική ενέργεια είναι $E = U + K = 50 \cdot (x-3)^2 + 50 \cdot \sqrt{25 - x^2} + \frac{125}{3} \frac{1}{25 - x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$

Η ενέργεια παραμένει σταθερή, δηλαδή όσο η αρχική $U_{\alpha\rho\chi=} = m \cdot g \cdot 2m = 200J$

Συνεπώς:

$$200 = 50 \cdot (x-3)^2 + 50 \cdot \sqrt{25 - x^2} + \frac{125}{3} \frac{1}{25 - x^2} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

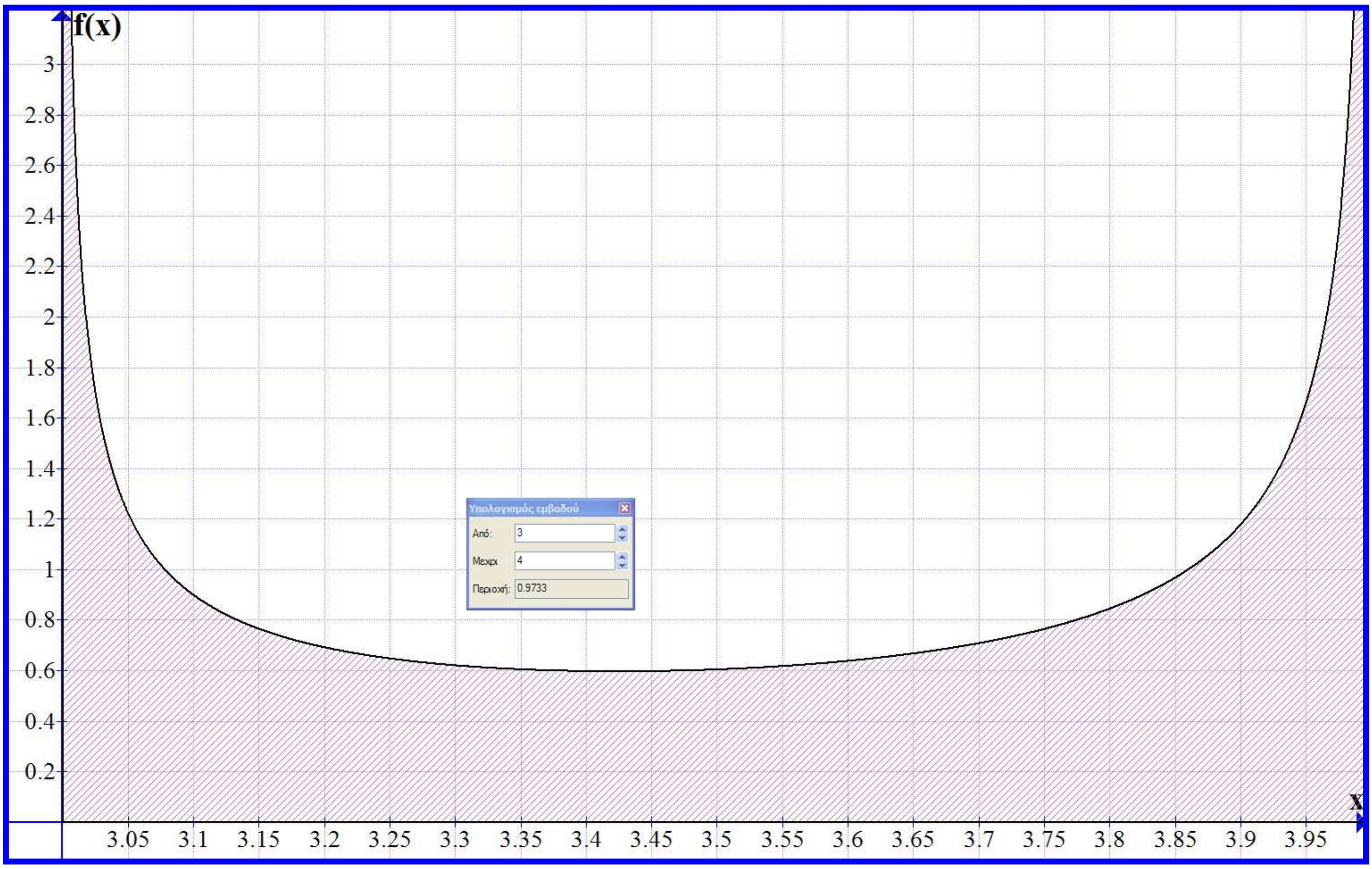
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{3\left[200 - 50 \cdot (x-3)^2 - 50 \cdot \sqrt{25 - x^2}\right] \cdot \left(25 - x^2\right)}{125}}$$

$$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{125}{3\left[200 - 50 \cdot (x-3)^2 - 50 \cdot \sqrt{25 - x^2}\right] \cdot \left(25 - x^2\right)}} \cdot dx$$

Αν παραστήσουμε γραφικά το τέρας:

$$\sqrt{\frac{125}{3\left[200 - 50 \cdot (x-3)^2 - 50 \cdot \sqrt{25 - x^2}\right] \cdot \left(25 - x^2\right)}}$$

και ολοκληρώσουμε, υπολογίζουμε χρόνο.
Θα βρούμε το εμβαδόν από $x = 3m$ ως $x = 4m$.
Το διπλάσιό του είναι ίσο με την περίοδο της ταλάντωσης.
Γκραφ εγκαίην.



Η περίοδος είναι περίπου $1,95s$