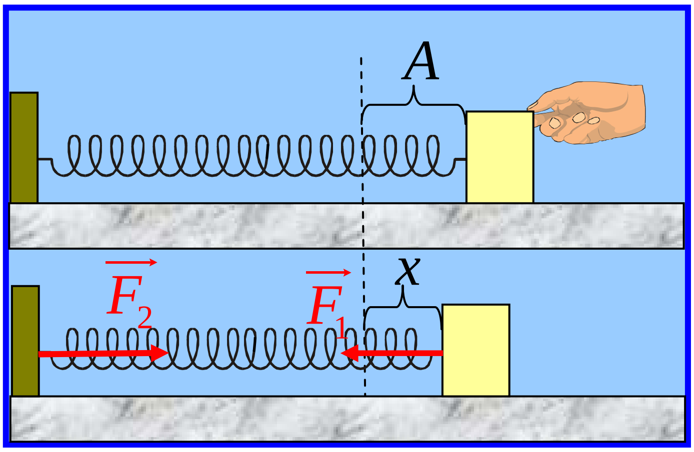
Το παράδοξο του έχοντος μάζα ελατηρίου.



Κρατώ το σώμα μάζας M έτσι ώστε το ελατήριο μάζας m και σταθεράς k να είναι τεντωμένο κατά Α.
Προφανώς ασκώ δύναμη μέτρου $k \cdot A$.
Το ελατήριο ασκεί δύναμη στο σώμα μέτρου επίσης $k \cdot A$ και αφού ισορροπεί δέχεται από τον τοίχο δύναμη ίδιου μέτρου.

Μόλις αφήνω το σώμα, το ελατήριο έχει παραμόρφωση Α.
Ποιες είναι οι δυνάμεις που το ελατήριο ασκεί στο σώμα και ο τοίχος στο ελατήριο;

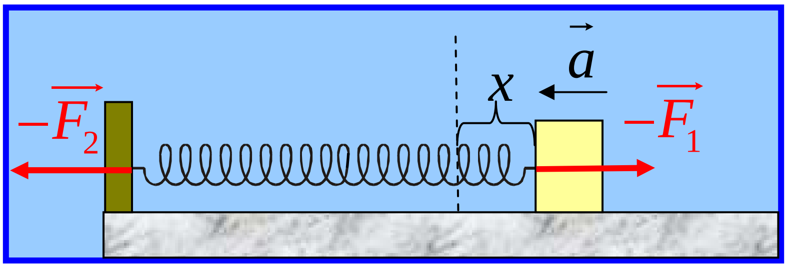
Είναι πάλι $k \cdot A$ διότι το ελατήριο έχει ίδια παραμόρφωση;

Απόπειρα απάντησης:
Στις συνήθεις ασκήσεις μας χρησιμοποιούμε ελατήρια ιδανικά, χωρίς μάζα. Οι δυνάμεις στα άκρα τους είναι ίσες όποια και αν είναι η επιτάχυνση του ελατηρίου, διότι $F_2 - F_1 = m \cdot a_{cm}$.
Με την μάζα του ελατηρίου αμελητέα έχουμε ότι $F_1 = F_2 = F_{\varepsilon\lambda} = k \cdot x$.

Τώρα όμως αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί.

Το σώμα ταλαντεύεται με γωνιακή συχνότητα $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{M + \dfrac{m}{3}}}$

Προφανώς $|F_1| = M \cdot \omega^2 \cdot x = M \cdot \dfrac{k}{M + \dfrac{m}{3}} \cdot x$



Το ελατήριο δέχεται δύο δυνάμεις.
Για τα μέτρα τους:
$F_2 - F_1 = m \cdot a_{cm}$
Όμως η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του ελατηρίου είναι η μισή της επιτάχυνσης του άκρου του (και του σώματος).

Έτσι $F_2 - F_1 = m \cdot \dfrac{a}{2}$

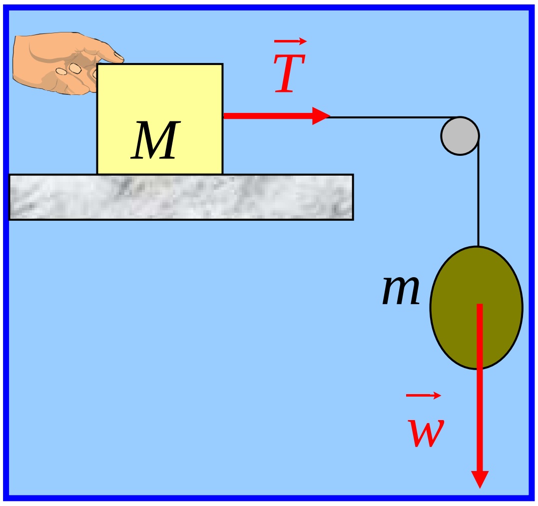
$$F_2 - M \cdot \frac{k}{M + \frac{m}{3}} \cdot x = \frac{m}{2} \cdot \omega^2 \cdot x \Rightarrow F_2 - M \cdot \frac{k}{M + \frac{m}{3}} \cdot x = \frac{m}{2} \cdot \frac{k}{M + \frac{m}{3}} \cdot x \Rightarrow F_2 = \frac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}} k \cdot x$$

Είναι φανερό το ότι $F_2 > k \cdot x$
Φυσικά όταν αφήνουμε το σώμα η δύναμη από τον τοίχο είναι $F_2 > k \cdot A$

Δηλαδή αυξήθηκε η δύναμη που ασκεί ο τοίχος από $k \cdot A$ σε $\dfrac{M + \frac{m}{2}}{M + \frac{m}{3}} k \cdot A$.

Αν $M = 60kg$, $m = 3kg$, $k = 100\, {}^{N}\!/_{m}$ και $A = 20cm$, η δύναμη αυξάνεται από 10N σε 10,1N.

Αν όμως μάζα του σώματος είναι αμελητέα (ελεύθερο λάστιχο) τότε η δύναμη αυξάνεται από 10Ν σε 15Ν. Δηλαδή μιάμιση φορά.
Ο Βαγγέλης δεν δέχεται την ισχύ του τύπου της γωνιακής συχνότητας για τέτοιες σχέσεις μαζών.
Ας κρατήσουμε τον μεγάλο λόγο (60:3).



Τέτοιες καταστάσεις δεν είναι η πρώτη φορά που συναντάμε.
Ας θυμηθούμε την περίπτωση δεξιά.
Όσο κρατάμε το σώμα $T = w$.
Όταν το αφήνουμε $T = w\dfrac{M}{m+M}$

Ίσως πρέπει να ξαναδούμε την «μια τρύπα στο νερό».